SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

SEMESTRAL

UNI





Álgebra

Tema: Función inversa

Docente: Segundo Heli Chiroque Reyes

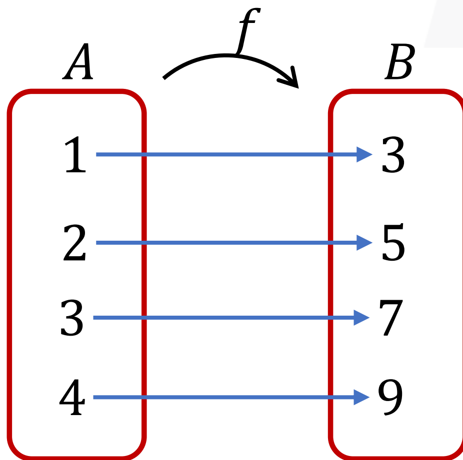
academiacesarvallejo.edu.pe

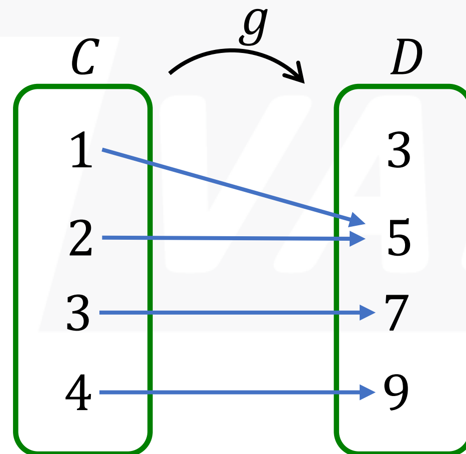
FUNCIÓN INYECTIVA O UNIVALENTE

Una función f es inyectiva si a dos elementos diferentes en el dominio, le corresponden dos elementos diferentes en el rango, es decir:

$$\text{Si } a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b) \quad ; \forall\, a; b \in Domf$$

Ejemplo





f es inyectiva

g no es inyectiva

En forma equivalente:

Una función es inyectiva, si a cada elemento de su rango le corresponde un solo elemento del dominio.

$$Si\ f(a) = f(b) \rightarrow a = b \quad ; a; b \in Domf$$

Ejemplo

Pruebe que $f(x) = \dfrac{3}{x-4}; x \neq 4$ es inyectiva

Resolución

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación

Se define la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \langle -1; 1 \rangle$ tal que

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

Demostrar si f es inyectiva.

Resolución:

Nota

- Si la función f es creciente $\forall x \in \operatorname{Dom} f$ entonces f es inyectiva.
- Si la función f es decreciente $\forall x \in \operatorname{Dom} f$ entonces f es inyectiva.

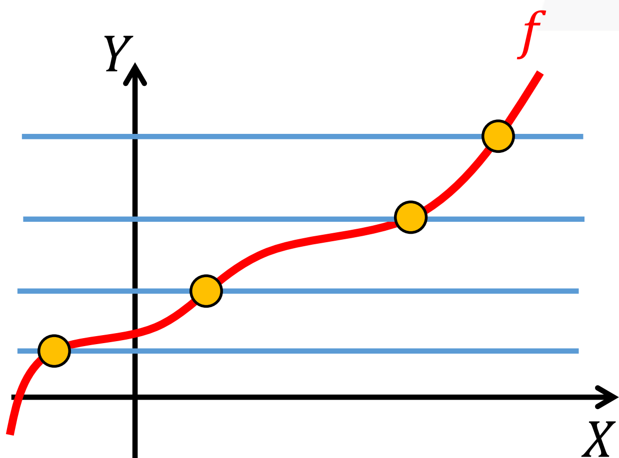
ACADEMIA CÉSAR VALLEJO



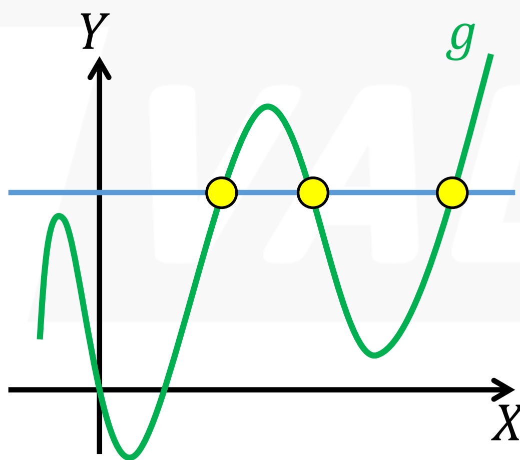
¡Importante!

En forma gráfica, se dice que una función f es inyectiva si toda **recta horizontal**, **corta** a la gráfica de la función a lo más **en un punto**.

Ejemplo



f es inyectiva



g no es inyectiva

FUNCIÓN SOBREYECTIVA O SURYECTIVA

La función $f: A \to B$ es sobreyectiva cuando el conjunto de llegada B es el rango, es decir

$$f \text{ es sobreyectiva} \quad \leftrightarrow \quad Ranf = B$$

Aplicación:

Dada la siguiente función f: $[1; 6\rangle \to [1;16\rangle$

Tal que $f(x) = 3x - 2$, determine si la función es sobreyectiva.

Resolución:

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación

Sea la función $f\colon \langle a;b] \to [-2;2\rangle$ tal que $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, determine la suma de elementos enteros de su dominio.

Resolución



¡Importante!

Si en una función **no se indica el conjunto de llegada**, entonces se asume que el rango es el conjunto de llegada por lo tanto la función **es sobreyectiva**.

Ejemplo

Dada la función $f(x) = 4x^2 - 3x + 2;\ x \in \mathbb{R}$

Como no se indica el conjunto de llegada

$\rightarrow$ f es sobreyectiva

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

FUNCIÓN BIYECTIVA

Una función f es biyectiva si es **inyectiva y sobreyectiva** a la vez.

Aplicación

Si $f: [1; 3\rangle \longrightarrow [2; 10\rangle$ tal que $f(x) = x^2 + 1$.

¿ f es una función biyectiva?

Resolución

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

FUNCIÓN INVERSA

Sea $f=\{(x;y)/\, x\in Domf, y=f(x)\}$ una función inyectiva. Se define la función inversa f^*(o también f^{-1}) como:

$$f^*=\{\ (y;x)\ /\ x\in Domf, y=f(x)\ \}$$

Ejemplo

Si $f=\{(1;4)\ ;(2;-3)\ ;(-1;0)\ ;(-2;5)\ ;(4;1)\}$

$\rightarrow f^*=\{(4;1)\ ;(-3;2)\ ;(0;-1)\ ;(5;\ -2)\ ;\ (1;\ 4)\}$

Se tiene que

- $Domf^*=\{\ 4;-3;0;5;1\ \}=Ranf$
- $Ranf^*=\{\ 1;2;-1;-2;4\ \}=Domf$

- $f(1)=4\ \leftrightarrow\ 1=f^*(4)$
- $f(2)=-3\leftrightarrow 2=f^*(-3)$
- $f(-1)=0\ \leftrightarrow\ -1=f^*(0)$

$\vdots$

Observación:

$$f=\{\,(1;2);\ (3;4);\ (5;4);\ (6;7)\}$$

es una función **no inyectiva**, su inversa

$$f^*=\{\,(2;1)(4;3)(4;5)(7;6)\}$$

no es función.

Por ello es importante la inyectividad de la función, con ello garantizamos la existencia su inversa.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Propiedades:

Sea f una función inyectiva con dominio A y rango B. La función inversa f^* cumple las siguientes propiedades.

1) $\text{Dom}f = \text{Ran}f^*$ $\wedge$ $\text{Ran}f^* = \text{Dom}f$

2) $f(x) = y$ $\leftrightarrow$ $x = f^*(y)$

3) $(f^*)^* = f$

Ejemplo

Si $f = \{(1;4);(2;-3);(-1;0);(-2;5);(4;1)\}$

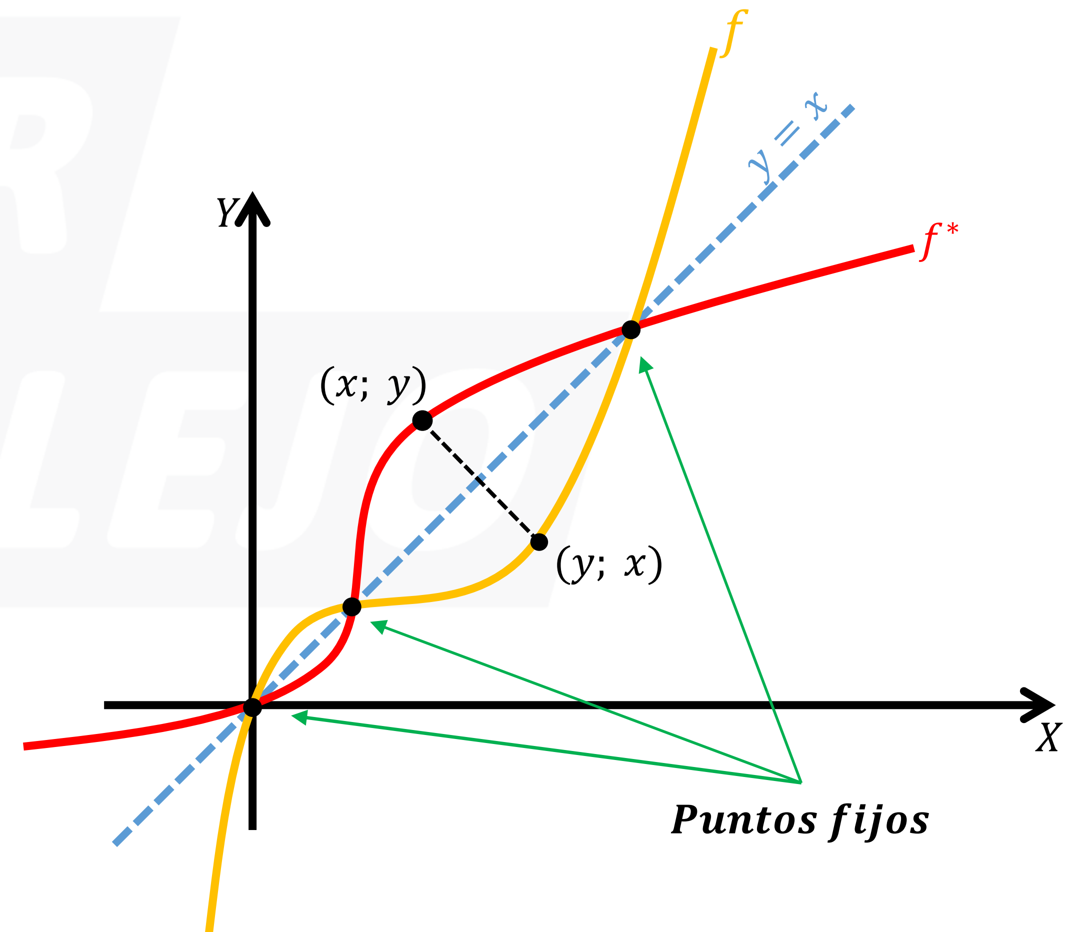
$\rightarrow f^* = \{(4;1);(-3;2);(0;-1);(5;-2);(1;4)\}$

$(f^*)^* = \{(1;4);(2;-3);(-1;0);(-2;5);(4;1)\}$

4) $f \circ f^{-1} = I_B$ donde I_B es la función identidad en B

$f^{-1} \circ f = I_A$ donde I_A es la función identidad en A

5) La gráfica de f^* es simétrica a la gráfica de f respecto a la gráfica de $y = x$



ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Cálculo de la función inversa (f^*)

Dado la función $y = f(x)$; $x \in Domf$

Para calcular la función inversa, se tiene:

1) Demostrar que f es inyectiva

2) Cálculo del $Domf^*$

Para ello, se calcula el rango de f, porque

$$Ranf = Domf^*$$

3) Cálculo del $y = f^*(x)$

Para ello:

- Se despeja x en función de y
- Se intercambia x con y

Aplicación

Dada la función $f: \langle -1; 4] \longrightarrow B$, tal que $f(x) = 3x + 1$, halle f^*.

Resolución

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación

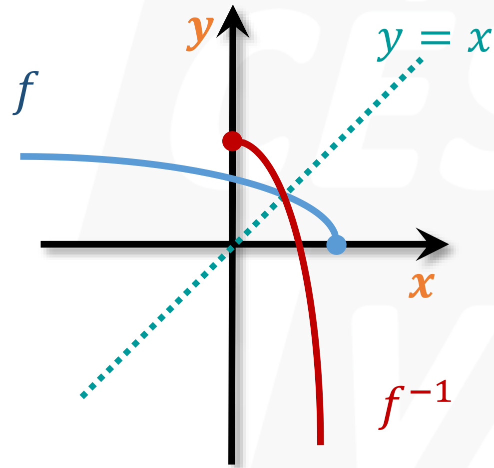
Sea $f: \langle -\infty\,; 1] \longrightarrow B$ una función, tal que $f(x) = x^2 - 2x + 4$; halle su inversa (si es que existe).

Resolución

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

PROPIEDADES:

- Si f es creciente entonces f^{-1} es creciente
- Si f es decreciente entonces f^{-1} es decreciente



Si f y g son inyectivas, y $\text{Dom}(f \circ g) \neq \emptyset$

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe